MA1 – „písemné cvičení" (příklady ke cvičení 18.11.20)

Užití derivace – výpočet limit funkcí užitím l'Hospitalova pravidla

Větu o l'Hospitalově pravidlu pro výpočet podílu funkcí

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ pro případ limity typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\text{cokoliv}}{\infty}$"

$(\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty)$ i varování před „špatným" užitím tohoto

pravidla jsme probrali v přednášce 11.11. a 16.11., přidáme jen

několik poznámek:

1. Je třeba vždy ověřit předpoklady věty, je-li ale limita typu „$\frac{L}{\infty}$", kde $L \in \mathbb{R}$, pak je zbytečné „l'Hospitalovat", neboť lze užít AL (aritmetika limit): limita typu „$\frac{1}{\infty}$" $= 0$!

2. Pozor na to, že l'Hospitalovo pravidlo je jen implikace ! :

$$\text{ex. } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \text{ex. i } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(pokud samozřejmě platí předpoklady věty), tj. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Příklad:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} = 1$$

(neboť (VOS) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$)

ale: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x-\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ neexistuje

(už jen proto, že funkce $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ není definována v žádném okolí ∞ !)

Při počítání "limity pomocí l'Hospitalova pravidla správně "píšeme

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \left(\text{pro } \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty}\right), \text{ ale}$$

když $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, musíme vše „škrtnout" a hledat cestu „k limitě" jinou. (viz předchozí příklad)

3. L'Hospitalovo pravidlo lze (při splnění předpokladů) použít i opakovaně několikrát:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x} = „\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6} = \infty \text{ (konečně!)}$$

(a věřím, že indukcí ukážete, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pro $n\in N$, n-libovolné.

4. A jak možno l'H. pravidlo vnímat?

Je dobré uvědomit si kromě geometrického významu vlastní derivace $f'(a)$ jako směrnice tečny i to, že ve fyzice (např.) derivace je „okamžitá rychlost pohybu (bodu) (obecněji okamžitá rychlost změny uvažované veličiny: je-li $s(t)$ dráha,

pak $s'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ (neboli limita průměrné rychlosti pohybu v nejmenším intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$)

A limity podílu $\frac{f(x)}{g(x)}$ typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$" můžeme chápat jako „srovnání", „nul", nebo „nekonečen" – viz výpočet limit v minulých cvičeních a DÚ 6 – v jednoduchém tvaru:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \stackrel{*}{=}$$ ale ve jmenovateli je „rychlejší ∞", tak „vyhraje":

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \underline{\underline{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}} \underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}\right)}_{\to 1}$$

Takže se můžeme „dívat" na l'Hospitalovo pravidlo asi tak, že když „srovnání" funkcí $f(x)$ a $g(x)$ při konvergenci k 0 nebo ∞ „nevidíme", tak pomocí rychlostí – a srovnáváme rychlosti – a když „nevidíme" ani srovnání rychlostí – použijeme znovu l'Hospitala (viz příklad) – a vlastně pak srovnáváme zrychlení („rychlost" změny rychlosti je ve fyzice zrychlení)

(Toto samozřejmě není „důkaz", jen jeden z možných pohledů na tuto užitečnou větu)

Tedy příklad $\underline{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty}$ – lze interpretovat výsledek, že

exponenciela jde k ∞ „rychleji" než jakákoliv mocnina x^n (pro $x \to \infty$)

A třeba $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$!

tedy „x" jde k ∞ rychleji než fce $\ln x$ (představte si grafy!)

5. A jistě jsou občas problémem limity typu „$0.\infty$" a „$\infty - \infty$" – i ty se mohou „počítat" užitím „l'Hospitala" – – ale tak, že se nejprve „převedou" na limitu podílu (už jsme též viděli u limit, počítaných bez „l'Hospitala")

<u>A příklady:</u> (některé ze zadaných v 8. cvičení zde vyřeším, ty zbývající a řadu i jiných si můžete „zkusit" sami)

a) $\left(\frac{\infty}{\infty} \vee \frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

(a zřejmě i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{(l'H)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^2)} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{\frac{1}{2+3x^2}\cdot 6x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+3x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{3} \overset{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\,\frac{6x}{2x} \underset{AL}{=} 3\cdot\frac{1}{3} = 1$$

(nebo můžete už počítat v (*) limitu „jako dříve – – vytknutím" x^2 v čitateli i jmenovateli nebo i „odhadem")

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos^2 x} \underset{(AL)}{=} 0 \qquad \text{(zkuste i bez l'H.)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{\sin(x^2)} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}(-2x)}{\cos(x^2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{\cos(x^2)} \underset{AL}{=} 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\,1}{3\cancel{x^2}(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

b) limity typu „$0\cdot\infty$" (převedeme na $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to 0+} x^2\ln x = „0\cdot(-\infty)" = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = „\frac{-\infty}{+\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$ – poznámka – při převedení „součinu na podíl" je nutno vždy zkusit tu „horší" funkci nechat v čitateli – ale občas to nevyjde, tak zkuste „opačně":

a zkuste sami i

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x,\ a>0$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x^2}} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{\frac{-2}{x^3}} -$$

– asi se nám nepovedlo – limita po l'H. je „horší" – tak obráceně (na další stránce)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = „\frac{\infty}{\infty}" =$$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = „\frac{-\infty}{-\infty}" = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = „\frac{2}{\infty}" = 0$$

nebo můžeme přejít užitím VLSF k $+\infty$ (před užitím l'H)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x} = \lim_{y\to+\infty} (-y)^2 e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^{y}} \underset{l'H.}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{e^{y}} \underset{l'H}{=} \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{2}{e^{y}} = „\frac{2}{\infty}" = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1-\frac{2}{x}\right) = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\text{VLSF}\\(*)}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-2t)}{t} =$$

(z DÚ 6)

$$= „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1-2t}\cdot(-2)}{1} = -2$$

(*) – poznámka – zde se dost vyplatí „přejít k limitě" $t\to 0$ (při $t=\frac{1}{x}$) – derivace pak vychází „jednodušší" (obvykle)!

Jinak: bez (VLSF)

$$\underset{l'H.}{\overset{(*)}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1-\frac{2}{x}} \underset{AL}{=} -2$$

(tady „to zlé" není tak „zlé"!)

a podobně:

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} x^2 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)} = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{VLSF}{=} \left(\frac{1}{x}=t\right)$$

$x\to+\infty \Rightarrow t\to 0+$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\arcsin t}{t^2} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{\overset{(*)}{=}} \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{2t} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$$

Ale od (*) ke užitím (T): $\left(T: \lim_{t\to 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1\right)$

$$\overset{*}{=} \lim_{t\to 0+} \underbrace{\frac{\arcsin t}{t}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{\to+\infty} \underset{AL}{=} +\infty$$ (tedy snadno i bez „l'Hospitala")

c) <u>limity typu „$\infty - \infty$"</u>

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)} = „\infty - \infty" \underset{1)}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \underset{(*)}{=} ?$$

1) pomíjivé je „úpravě" nešlo být i převedení na součin

2) ale pak $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ („ná byla")

a pokračujeme: $\overset{*}{=} „\infty\cdot 1" \underset{AL}{=} \infty$

$$\lim_{x\to 0\pm}\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \left(\pm\infty - (\pm\infty)\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sin x - 3x}{3x \sin x} = „\frac{0}{0}"$$

(?)

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0\pm} \frac{\cos x - 3}{3(\sin x + x\cos x)} = „\frac{-2}{0\,?}" = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 3}{3x\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\cos x}_{\to 1}\right)} =$$

$$= „\frac{-2}{0\pm}" = \mp\infty$$ (tedy oboustranná limita neexistuje)

A zde vidíme, že bychom asi jednodušeji uměli limitu „bez l'Hospitala":

$$\lim_{x\to 0\pm}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{3x}\underbrace{\left(1-3\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\right)}_{-2} = \text{"}\pm\infty\cdot(-2)\text{"}$$

$$= \mp\infty$$

d) místo „komplikovanějších" limity – tak jen „některé":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} \underset{def}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to -1} e^{y} = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{VLSF}{=} \left(-\frac{1}{x}=t,\ t\to 0\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{-t} \underset{(T)}{=} -1$$

(ale i l'Hospitalem „vyjde": $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1$)

Užili jsme definice: chápeme

$$\text{"}f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}\text{"}$$

pro $f(x)>0$

A ještě „obtížnější" limita (pro „zájemce")

$$(*)\quad \lim_{x\to 0}\left(e^{x}-2x\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln(e^{x}-2x)} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to -\frac{1}{2}} e^{y} = \underline{e^{-\frac{1}{2}}}$$

($e^{x} > 2x$ „blízko" $x=0$) tj. fce def. v $U(0)$

$$\text{a}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(e^{x}-2x) \underset{\text{„}}{=} \pm\infty\text{ „}0\text{"} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{x}-2x)}{2x} \underset{\text{„}}{=} \frac{0}{0}\text{"} =$$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^{x}-2x}\left(e^{x}-2\right)}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\,\frac{e^{x}-2}{e^{x}-2x} \underset{AL}{=} \frac{-1}{2}$$

(Můžete si zkusit „vypočítat" limitu i bez l'Hospitala)

A ještě „větší" cvičení derivací (též pro zájemce)

$$(*)\quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^{2}}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^{2}} \underset{\text{„}}{=} \frac{0}{0}\text{"} \underset{(x>0)}{=}$$

(a odtud i $\lim \frac{1}{x^{2}}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, neboť $\frac{1}{x^{2}}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ je funkce sudá)

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{x^{2}} \underset{\text{„}}{=} \frac{0}{0}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x-\frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^{2}\sin x} \underset{\text{„}}{=} \frac{0}{0}\text{"} \underset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\cancel{\cos x}-x\sin x-\cancel{\cos x}}{2\left(2x\sin x+x^{2}\cos x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x} \underset{\text{„}}{=} \frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos x}{2\cos x+\cos x-x\sin x}$$

$$\underset{AL}{=} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{6}$$

A pak limita (zadaná na cvičení na Matfyzu)

$$(**)\quad \underline{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to -\frac{1}{6}} e^{y} = e^{-\frac{1}{6}}$$

Snad bylo „spočítané" limity pro procvičení l'Hospitalova pravidla stačí, a ještě jeden příklad („humorný")

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1 \quad \left(= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\cancel{x}} \underset{\text{AL}}{=} 1 \right)$$

$(x>0 \text{ stačí}) \quad \left(\text{„}+\frac{1}{\infty}\text{"}=0\right)$

– to každý, doufám, „vidí"!

<u>Ale „l'Hospitalem":</u>

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1} \underset{\text{„úprava"}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H}{=}$$

(nevadí, zopakujeme l'H)

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} -$$

– a kdo si všimne, že je opět na „začátku", tak toho nechá, a kdo si nevšimne, tak může derivovat dále!